重点内容复习

1. 商映射 π : $V \to V/U$ 对 $\forall v \in V$ $\pi(v) = v + U$.

$\tilde{T}$: $V/\mathrm{null}\,T \to W$ $\tilde{T}(v + \mathrm{null}\,T) = Tv$

限制算子 $T|_U \in \mathcal{L}(U)$，对 $u \in U$ $T|_U(u) = Tu$.

商算子 $T/U \in \mathcal{L}(V/U)$. 对 $v \in V$ $(T/U)(v+U) = Tv + U$.

2. 对偶：

(1) 对偶空间 $V' = \mathcal{L}(V, F)$ $\dim V' = \dim V$

(2) 对偶基

$v_1, v_2, \cdots v_n$ 是 V 的基，其所对应的对偶基为 V' 中元素 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$

使 $\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

通俗意思，$\varphi_j(\alpha)$ 就是先把 α 由 $v_1 \cdots v_n$ 表示出来然后 $\varphi_j(\alpha)$ 就是 v_j 的系数（在该基表示下的第 j 个坐标）

(3) 对偶映射

$T \in \mathcal{L}(V, W)$，T 的对偶映射 $T' \in \mathcal{L}(W', V')$，对 $\forall \varphi \in W'$.

有 $T'\varphi = \varphi \circ T$

① 零化子：对于 $U \subset V$，U 的零化子 U°：

$U^\circ = \{\varphi \in V' :$ 对所有 $u \in U$，有 $\varphi(u) = 0\}$

维数 $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$

② $\mathrm{null}\,T' = (\mathrm{range}\,T)^\circ$ 用矩阵来理解

$\dim \mathrm{null}\,T' = \dim \mathrm{null}\,T + \dim W - \dim V$

$\dim \mathrm{range}\,T' = \dim \mathrm{range}\,T$

$\mathrm{range}\,T' = (\mathrm{null}\,T)^\circ$

③ T' 的矩阵是 T 的矩阵的转置

3. 本征向量/值、不变子空间

(1) 不相同的本征值对应的本征向量线性无关

(2) 复空间上的算子都有本征值

(3) 上三角矩阵条件：

① T 关于 $\{v_1, \cdots v_n\}$ 为上三角

② 对 $j = 1, \cdots, n$ $Tv_j \in \mathrm{span}\{v_1, v_2, \cdots v_j\}$

③ 对 $j = 1, \cdots, n$ $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \cdots v_j\}$ 是 T-不变的

在 $\mathbb{C}$ 上每个算子都有上三角矩阵

4. 可对角化等价条件

① V 有本征向量构成的基

② $V = E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_2, T) \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$

③ $\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \dim E(\lambda_2, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T)$

充分条件：有 $\dim V$ 个互异的本征值

5. 内积定义：
- 正性 $\langle v, v \rangle \geq 0$
- 定性 $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$
- 第一个位置加性与齐性
- 共轭对称性 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

$\beta(u, v) = \langle u, \overline{\beta} v \rangle$ 共轭不要忘

(1)
- 勾股定理 $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
- 柯西不等式 $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$
- 三角不等式 $\|u+v\| \geq \|u\| + \|v\|$
- 平行四边形恒等式 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

范数的内积表示：$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)$

(2) ☆ 施密特正交化过程（转化矩阵为上三角阵）

(3) 舒尔定理：V 为有限维复空间，则 T 关于 V 的某个规范正交基有上三角矩阵

(4) 里斯表示定理

$\varphi(v) = \langle v, \beta \rangle \Rightarrow R(\varphi) = \beta$

$\varphi(v) = \varphi(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n)$

$= \langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} \cdot e_n \rangle$

(5) 正交补 $U^\perp$

性质：① $V = U \oplus U^\perp$ ② $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ ③ $U = (U^\perp)^\perp$

正交投影

- V 到 U 上的正交投影 $P_U \in \mathcal{L}(V)$，对 $\forall v \in V$，$v = u + w$，

其中 $u \in U$ $w \in W^\perp$ $P_U(v) = u$

- **6.55 正交投影 P_U 的性质**

设 U 是 V 的有限维子空间且 $v \in V$. 则

(a) $P_U \in \mathcal{L}(V)$;

(b) 对每个 $u \in U$ 均有 $P_U u = u$;

(c) 对每个 $w \in U^\perp$ 均有 $P_U w = 0$;

(d) $\mathrm{range}\, P_U = U$;

(e) $\mathrm{null}\, P_U = U^\perp$;

(f) $v - P_U v \in U^\perp$;

(g) $P_U^2 = P_U$;

(h) $\|P_U v\| \leq \|v\|$;

(i) 对 U 的每个规范正交基 $e_1, \ldots, e_m$ 均有 $P_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m \rangle e_m$.

- 极小化问题

U 为 V 中有限维子空间，$v \in V$，$u \in U$

$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|$

等号成立当且仅当 $u = P_U v$

6. 内积空间上的算子

- 伴随 T^*

T 的伴随 T^*：$W \to V$，对 $\forall v \in V$，$w \in W$，有 $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$

与对偶相联系 $T' = R^{-1} T^* R \Rightarrow T^* = R T' R^{-1}$

- 零空间与值域

$\mathrm{null}\,T^* = (\mathrm{range}\,T)^\perp$
$\mathrm{range}\,T^* = (\mathrm{null}\,T)^\perp$ } 与对偶映射类似

- $\mathcal{M}((e_1, e_2, \cdots e_n), (f_1, \cdots f_m), T)$ 为 $\mathcal{M}((f_1, f_2, \cdots f_m), (e_1, \cdots e_n), T^*)$ 的共轭转置，其中 $(e_1, e_2, \cdots e_n)$ $(f_1, \cdots f_m)$ 为规范正交基

(1) 自伴算子 $T = T^*$

① 自伴算子特征根是实的

② 在 $\mathbb{C}$ 上仅有 0 算子才能使对 $\forall v \in V$，有 $\langle Tv, v \rangle = 0$

③ 在 $\mathbb{C}$ 上仅有自伴算子才能使 $\langle Tv, v \rangle$ 为实数 $(\forall v)$

④ 若 $T = T^*$ 且对 $\forall v$ 均有 $\langle Tv, v \rangle = 0$，则 $T = 0$

$$\langle Tu, w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4} + \frac{\langle T(u+iw), u+iw \rangle - \langle T(u-iw), u-iw \rangle}{4}$$

若自伴且在实空间下 $\langle Tu, w \rangle = \dfrac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4}$

证明上述结论重要的两个式子

(2) 正规算子 $TT^* = T^*T$

☆ ① 正规刻画 $\|Tv\| = \|T^* v\|$

② T 与 T^* 有相同的本征向量（研究 $\|(T - \lambda I)v\|$）

③ T 相应于不同本征值的本征向量正交

7. 谱定理

(1) 复谱定理

① T 是正规的 ② V 有一个由 T 的本征向量构成的基

③ T 关于 V 的某个规范正交基有对角矩阵 ☆

(2) 实谱定理 处理二次式的 → 从而获得特征值

① T 是自伴的 ② V 有一个由 T 的本征向量构成的基

③ T 关于 V 的某个规范正交基有对角矩阵 ☆

8. 正算子与等距同构

(1) 正算子：称 $T \in \mathcal{L}(V)$ 为正的，若 T 是自伴的且对 $\forall v \in V$，有 $\langle Tv, v \rangle \geq 0$

(2) 平方根：称 R 为算子 T 的平方根，若 $R^2 = T$

正算子的刻画

① T 为自伴的，且所有特征值非负

② T 有自伴的平方根 ③ T 有正的平方根

③ 存在算子 R 使 $T = R^* R$

每个正算子均有唯一的正平方根（记为 $\sqrt{T}$）

(3) 等距同构（正交矩阵）

称算子 S 为等距同构：对 $\forall v \in V$ 均有 $\|Sv\| = \|v\|$

刻画：

① 对 $\forall u, v \in V$ 有 $\langle Su, Sv \rangle = \langle u, v \rangle$

② 对 V 中任意规范正交向量组 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 有 $Se_1, \cdots Se_n$ 亦为规范正交的

③ V 有规范正交基使 $Se_1, Se_2, \cdots Se_n$ 为规范正交的

④ $S^* S = I$ / $SS^* = I$

⑤ S^* 为等距同构

在复向量空间下，

(1) S 为等距同构

(2) V 有一个由 S 本征向量构成的基，相应的本征值绝对值均为 1

4. 极分解与奇异值分解

(1) 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，则有一个等距同构 $S \in \mathcal{L}(V)$，使 $T = S\sqrt{T^*T}$

证明：$\|Tv\| = \|\sqrt{T^*T}\, v\|$

$\Rightarrow$ 说明 $\mathrm{null}(Tv) = \mathrm{null}(\sqrt{T^*T}\, v)$

则 $\dim \mathrm{range}\, T = \dim \mathrm{range}(\sqrt{T^*T})$

建立基的一一对应关系

$$S: \begin{cases} \mathrm{range}\sqrt{T^*T} \longrightarrow \mathrm{range}\,T \\ (\mathrm{range}\sqrt{T^*T})^\perp \longrightarrow (\mathrm{range}\,T)^\perp \end{cases}$$

(2) 奇异值：$\sqrt{T^*T}$ 的本征值

(3) 奇异值分解：设 $s_1, \cdots s_n$ 为奇异值，则 V 中有规范正交基 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 和 $f_1, f_2 \cdots f_n$

对 $\forall v$ 有 $Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$

8. 零空间的描述

(1) 零空间序列递增 $0 \subset \mathrm{null}\,T \subset \mathrm{null}\,T^2 \subset \cdots \mathrm{null}\,T^k \subset \mathrm{null}\,T^{k+1} \subset \cdots$

(2) 存在等式 $\mathrm{null}\,T^k = \mathrm{null}\,T^{k+1}$ 则 $\mathrm{null}\,T^k = \mathrm{null}\,T^{k+1} = \mathrm{null}\,T^{k+2} = \cdots$

(3) 零空间停止增长，$T \in \mathcal{L}(V)$，$n = \dim V$，则 $\mathrm{null}\,T^n = \mathrm{null}\,T^{n+1} = \cdots$

(4) $V = (\mathrm{null}\,T^{\dim V}) \oplus (\mathrm{range}\,T^{\dim V})$

9. 广义本征向量

λ 是 T 的本征值，称 v 为 T 相应于 λ 的广义本征向量，若 $v \neq 0$ 且存在正整数 j 使得 $(T - \lambda I)^j v = 0$

广义本征空间：$G(\lambda, T) = \mathrm{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$

- 不同本征值相应的特征向量线性无关

10. 幂零算子 N

- $N^{\dim V} = 0$
- V 中有一组基，使 N 关于这个基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

（思路：基从 $\mathrm{null}\,N$ 扩张 $\to \mathrm{null}\,N^2 \to \mathrm{null}\,N^3 \cdots$）

11. 复空间上算子的刻画

- V 为复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 为 T 的不同本征值

① $V = G(\lambda_1, T) \oplus G(\lambda_2, T) \cdots \oplus G(\lambda_n, T)$

② 每个 $G(\lambda_j, T)$ 在 T 下不变

③ 每个 $(T - \lambda_j I)|_{G(\lambda_j, T)}$ 都是幂零的 $(\lambda_j I + N)$

- V 中有一个由 T 的广义本征向量组成的基
- 本征值 λ 的重数定义为 $\dim G(\lambda, T)$ 代数重数
  几何重数 $\dim E(\lambda, T)$
  重数之和为 $\dim V$

12.
- $I + N$ 有平方根（$I + a_1 N + a_2 N^2 + \cdots$ 解方程）
- $\mathbb{C}$ 上可逆算子有平方根（化 $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots$）

13. 特征多项式与极小多项式

(1) 特征多项式

V 为复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，令 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ 表示 T 所有互不相同的本征值，重数分别为 $d_1, d_2 \cdots d_m$，多项式

$(z - \lambda_1)^{d_1} (z - \lambda_2)^{d_2} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$ 即为特征多项式

(2) 哈密顿－凯莱定理

V 为复向量空间，q 为 T 的特征多项式，$q(T) = 0$

(3) 极小多项式

存在唯一一个次数最小的首一多项式 p 使 $p(T) = 0$

- 本征值是极小多项式的零点
- $q(T) = 0$ 则表明 q 为极小多项式的一个倍式

14. 若尔当型

15. 算子的复化

- 每个算子都有一维或二维不变子空间

本征值相关

- 设 V 为实向量空间，$\lambda \in \mathbb{R}$，则 λ 为 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值当且仅当 λ 是 T 的本征值
- V 为实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathbb{C}$，j 为非负整数，$u, v \in V$

$(T_{\mathbb{C}} - \lambda I)^j (u + iv) = 0 \Leftrightarrow (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} I)^j (u - iv) = 0$

归纳法证明

- $T_{\mathbb{C}}$ 的非实特征值成对出现，相应重数与共重数相等.
- 奇数维实向量空间上的算子均有本征值（先复化）

16. 实内积空间上的算子

(1) 实空间上的正规算子

9.27 非自伴的正规算子

设 V 是二维实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$. 则以下条件等价：

(a) T 是正规的但不是自伴的.

(b) T 关于 V 的每个规范正交基的矩阵都有

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的形式，其中 $b \neq 0$.

(c) T 关于 V 的某个规范正交基的矩阵有

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的形式，其中 $b > 0$.

9.30 正规算子和不变子空间

设 V 是内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的，U 是 V 的在 T 下不变的子空间. 则

(a) $U^\perp$ 在 T 下不变;

(b) U 在 T^* 下不变;

(c) $(T|_U)^* = (T^*)|_U$;

(d) $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ 和 $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ 都是正规算子.

9.34 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 时正规算子的刻画

设 V 设实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$. 则以下条件等价：

(a) T 是正规的.

(b) V 有规范正交基使得 T 关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是 1×1 矩阵，或者是形如

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的 2×2 矩阵，其中 $b > 0$.

（归纳法证明）

(2) 实内积空间上的等距同构

9.36 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 时等距同构的刻画

设 V 是实内积空间，$S \in \mathcal{L}(V)$. 则以下条件等价：

(a) S 是等距同构.

(b) V 有规范正交基使得 S 关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是由 1 或 -1 构成的 1×1 矩阵，或者是形如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

的 2×2 矩阵，其中 $\theta \in (0, \pi)$.